Олимпиада студентов и выпускников «Высшая лига» – 2021 г.

Методические рекомендации и демонстрационная версия заключительного этапа по направлению

«290. ТЕОРИЯ ИГР»

Общая информация о направлении

Олимпиада по направлению «ТЕОРИЯ ИГР» ориентирована на поиск талантливых и проактивных студентов, способных продемонстрировать навыки формализации модели на основе вербального описания теоретико-игровой ситуации, графического и формального — математического — анализа модели и интуитивного объяснения полученных результатов/наблюдаемых явлений и/или связей между ними. Олимпиадное задание включает задачи по теории игр, причем некоторые пункты олимпиадного задания могут носить междисциплинарный характер (например, связаны с некоторыми вопросами экономики, политологии, социологии, математических и компьютерных наук). При этом вся необходимая для понимания условия информация приводится в тексте задания.

Тематика заданий

1. Игры в нормальной форме. Игры в развернутой форме. Стратегические взаимодействия. Чистые и смешанные стратегии.

2. Строгое и слабое доминирование. Исключение доминируемых стратегий. Равновесие в доминантных стратегиях.

3. Равновесие Нэша в чистых и смешанных стратегиях. Алгоритмы поиска.

4. Антагонистические игры. Минимакс и максимин.

5. Дилемма заключенного, олигополии, модель Хотеллинга. Другие классические модельные игры.

6. Игры в развернутой форме: стратегии, конечные и бесконечные игры, дисконтирование. Обратная индукция. Равновесие, совершенное на подыграх.

7. Повторяющиеся игры. Модели дележа. Сговоры.

8. Игры с несовершенной информацией. Последовательные равновесия.

9. Игры с неполной информацией. Байесовы игры. Аукционы.

10. Стабильные мэтчинги. Алгоритм Гейла-Шэпли. Манипулирование.

11. Кооперативные игры. Решение Нэша. Дележи. С-ядро. Вектор Шэпли. Задачи распределения ресурсов.

12. Игры на сетях.

13. Алгоритмические игры.

Информация о первом (отборочном) этапе

Продолжительность состязания – 90 минут.

Задание первого (отборочного) этапа включает 20 тестовых вопросов на русском языке с автоматической проверкой ответов. Правильный ответ на каждый вопрос оценивается в 5 баллов. В сумме участник может набрать 100 баллов.

Второй (заключительный) этап

Продолжительность состязания – 180 минут.

Задания второго (заключительного) этапа состоят из единой инвариантной части.

Олимпиадное задание включает 6 задач. Вес каждой задачи и ее подпункта указан в задании. Общая сумма составляет 100 баллов.

Задание составлено на русском и английском языке, решение может быть представлено как на русском, так и на английском языке. Никаких дополнительных баллов, впрочем, как и штрафов, за решение на английском языке не предусмотрено.

Решение должно быть хорошо структурированным, изложено грамотным языком, а почерк – распознаваемым.

Все шаги решения должны быть обоснованы, все вычисления должны присутствовать в работе. Калькуляторами пользоваться запрещено.

Черновики не предусмотрены, решение сразу оформляется на чистовик. Если приведенное решение является неверным, участник его перечеркивает (перечеркнутое решение не проверяется) и приводит корректную версию.

При наличии нескольких вариантов решения одного и того же задания, проверяющий сам определяет, какое из решений подлежит проверке, и апелляции с просьбой проверить другой вариант решения не принимаются.

Критерии оценивания решения задач

- Оцениваются навыки формализации модели на основе вербального описания теоретико-игровой ситуации, графического и формального — математического — анализа модели и интуитивного объяснения полученных результатов/наблюдаемых явлений и/или связей между ними.
- В зависимости от веса задания и его подпунктов определяются баллы за частичное решение.
- Полная разбалловка по каждому заданию публикуется совместно с его правильным решением перед процедурой апелляции.

Список рекомендуемой литературы для подготовки

1. А.В. Захаров, *Теория игр в общественных науках,* Москва 2015.
2. В.И.Данилов *Лекции по теории игр.* Москва. РЭШ, 2002.
3. M.Osborne, *An Introduction to Game Theory*, Oxford University Press, 2009
4. D.Fudenberg, J.Tirole *Game Theory*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1991
5. M.Osborne, A.Rubinstein *A Course in Game Theory*, MIT Press, 1994
6. R.Gibbons *Game Theory for Applied Economists*, Princeton University Press, 1992
7. R. Myerson *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, 1991
8. K.G. Binmore *Playing for Real: A Text on Game Theory*, Oxford University Press, 2007.
9. A.MasCollel, M.Whinston, J.Green, *Microeconomic Theory*, Oxford Univ. Press, 1995.
10. D. Kreps, *A Course in Microeconomic Theory*, Harvester Wheatsheaf, 1990.
11. D. Kreps, *Game Theory and Economic Modelling*, Clarendon Press, 1990.
12. Th. Schelling, *The Strategy of Conflict*, Harvard University Press, 1981
13. Также рекомендуем прослушать видеокурсы Д.Дагаева и А.Савватеева на онлайн платформах.

Демонстрационный вариант второго (заключительного) этапа

Время выполнения задания – 180 мин., язык – русский или английский.

Решите все задачи.

Веса задач, в том числе каждого подвопроса, приведены в скобках.

Инструкции

- Решение может быть представлено как на русском, так и на английском языке. Никаких дополнительных баллов, впрочем, как и штрафов, за решение на английском языке не предусмотрено.
- Решение должно быть хорошо структурированным, изложено грамотным языком, а почерк – распознаваемым. Ответы на качественные вопросы должны быть убедительно аргументированы, но длинные рассуждения, не относящиеся к сути дела, могут негативно повлиять на оценку.
- Все шаги в решении должны быть обоснованы, все вычисления должны присутствовать в работе. Калькуляторами пользоваться запрещено.
- Черновики не предусмотрены, решение сразу оформляется на чистовик.
- Если приведенное решение является неверным, перечеркните его (перечеркнутое решение не проверяется) и приведите корректную версию.

- При наличии нескольких вариантов решения одного и того же задания, проверяющий сам определяет, какое из решений подлежит проверке, а апелляции с просьбой проверить другой вариант решения не принимаются.

1. (15 баллов) «Стоит ли смешивать компании?»
Пусть у каждой женщины и у каждого мужчины заданы строгие предпочтения на множестве партнеров противоположного пола. Дан граф знакомств, только знакомые между собой мужчина и женщина могут образовать пару.
Предположим, что совпадают предпочтения как всех мужчин, так и всех женщин. Алиса думает познакомить ли ей Бориса и Вику. Бывает ли так, что

(a) **(5 баллов)** Алисе выгодно познакомить Б и В?
(b) **(10 баллов)** Алиса окажется с менее предпочтительным мужчиной, познакомив Б и В?

(15 points) "Should one combine the parties?"
Let every woman and every man have strict preferences on a set of partners of the opposite sex. A familiarity graph is given, only a man and a woman who are familiar with each other can form a pair.
Suppose that the preferences of both all men and all women coincide. Alice is thinking to introduce Boris and Victoria. Is it possible that

(a) **(5 points)** It is profitable for Alice to introduce B and V?
(b) **(10 points)** The situation becomes worse for Alice if she introduce B and V?

2. (X+Y баллов) «Вдали от обезумевшей толпы»

(a) **(X баллов)** Напишите целое число X от 1 до 10. Те, кто написал число, которое встречается в работах всех других участников олимпиады по профилю «Теория игр» этого года *реже всего* получают указанное ими количество баллов.
(b) **(Y баллов)** Задача та же – написать число Y, но на этот раз выигрывают те, кто угадал второе по частоте число.

(X+Y points) "Far from the mad crowd"

(a) **(X points)** Write an integer number X from 1 to 10. Those who wrote the number that appears *the most rarely* in the works of all other participants of the Game Theory Olympiad of this year will receive the X number of points.
(b) **(Y points)** The task is the similar, i.e. to write an integer number Y from 1 to 10, but now the winners are those whose number is the second popular among others.

3. (20 баллов) «Судью на мыло!»
Перед началом матча Зенит-Спартак выяснилось, что на стадионе не хватает штанг у ворот. Судья всё же решил проводить матч по таким правилам: он произвольно (независимо с равномерным распределением) выбирает две точки $X<Y$ на отрезке $[0,40]$, и разрешает Зениту установить в эти точки штанги ворот: обычную и невидимую. Зенит решает, в какую из точек поставить каждую штангу. Спартак видит, что видимую штангу установили в точку Z, но не знает левая это штанга ($Z=X$) или правая ($Z=Y$).

(a) **(10 баллов)** На последней минуте матча Спартак готов нанести свой первый удар по "воротам" Зенита, "ворота" пустые. Куда следует бить, чтобы максимизировать вероятность гола?
(b) **(10 баллов)** В какую точку – X или Y – должен был установить видимую штангу Зенит, чтобы минимизировать вероятность гола?

(20 points) "The ref needs specs!"

Before the match between Zenit and Spartak starts, it found out that the stadium did not have enough goalposts at the gate. Nevertheless, the referee decided to play the match according to the following rules: he arbitrarily (independently with a uniform distribution) selects two points $X<Y$ on the interval [0.40], and allows Zenit to set the goalposts at these points, one is normal and one is invisible. Zenit decides at which point to put each goalpost. Spartak sees that the visible goalpost has been set to point Z, but does not know if it is the left one ($Z = X$) or the right one ($Z = Y$).

- **(a) (10 points)** In the last minute of the match, Spartak is ready to strike his first shot at the "goal" of Zenit, the "goal" is empty. Where to beat to maximize the probability of a goal?
- **(b) (10 points)** At what point, X or Y, should Zenit put the visible goalpost in order to minimize the probability of a goal?

4. (20 баллов) «Покупай!»

У продавца есть два товара, например, пылесос и утюг. Ценность каждого из этих товаров для покупателя, V_1 и V_2, соответственно, а обоих вместе – V_1+V_2. Продавец не знает точно ценности покупателя, но считает, что они равномерно распределены на [0,1000], независимо друг от друга. Полезность покупателя равна ценности приобретенных товаров за вычетом цен.

- **(a) (10 баллов)** Продавец может назначить цену для каждого из товаров по отдельности, и в этом случае покупатель купит те товары, ценность которых для него будет выше цены. Или же, продавец может продавать товары только вместе, единым пакетом. В этом случае покупатель купит оба товара, если сумма ценностей превысит цену пары. Какие оптимальные цены предложит продавец в каждом случае, и какой ожидаемый доход получит? Какая схема продажи для него оптимальнее, по отдельности или вместе?
- **(b) (10 баллов)** Предположим теперь, что продавец может предложить меню из трех возможностей: купить каждый товар по отдельности за свою цену или пакетом. Какие цены предложит продавец, и какой будет его ожидаемый доход?

(20 points) "Buy it!"

A seller has two goods for sale. A buyer has a value $V_1$and $V_2$for each good separately, and so a value of V_1+V_2 for both. The seller does not know the buyer's value exactly, he thinks that the values are uniformly distributed on [0,1000], independently from each other. The buyer's utility equals the values of the goods he buys minus their prices.

- **(a) (10 points)** The seller can set prices for each good separately, in which case the buyer would buy only the goods with value exceeding the price. Or, the seller can sell the goods only as a bundle. In this case the buyer would purchase both goods when the sum of their values exceeds the price of the bundle. What are the seller's optimal prices and expected revenues in each case? Which scheme would the seller prefer, selling the goods individually or as a bundle?
- **(b) (10 points)** Suppose now that the seller can offer a menu of three options: buying each good separately or both goods as a bundle. Which prices should the seller offer? How much expected revenue he would be able to obtain?

5. (15 баллов) «Проблема этикета»

Альбус Дамблдор (игрок 1), Северус Снегг (игрок 2) и Гарри Поттер (игрок 3) сидят за столом на торжественном ужине. Им приносят блюдо из рыбы и экзотическую вилку, с помощью которой эту рыбу следует есть. Проблема в том, что все трое не помнят, в какой руке надо держать вилку; изначально известно, возможно два состояния мира: $w=R$ (то есть вилку надо держать в правой руке) и $w=L$ (то есть вилку надо держать в левой руке). При этом априорная вероятность того, что $w=R$, равна $p\geq 1/2$.

В добавок, каждый игрок $i=1,2,3$ обладает частной информацией $s_i \in \{L,R\}$, которая верна с вероятностью $q>1/2$, причем

$$\frac{q}{1-q} > \sqrt{\frac{p}{1-p}}$$

То есть если вилку действительно надо держать в правой руке, то $s_i=R$ с вероятностью q и $s_i=L$ с вероятностью 1-q. При заданном w случайные величины статистически независимы.

- **(a) (5 баллов)** Пусть игроки берут в руки вилки в такой очередности: сначала Дамблдор выбирает a_1□$\{L,R\}$, потом Снегг выбирает a_2, потом Поттер выбирает a_3. Каждый игрок хочет одного: не ошибиться, какой рукой взять вилку – в таком случае он получает выигрыш, равный 1 (и выигрыш, равный 0 в противоположном случае). Найдите, как выбор Снегга будет зависеть от s_2 и a_1.
- **(b) (5 баллов)** Найдите, как выбор Поттера будет зависеть от a_1, a_2 и s_3.
- **(c) (5 баллов)** Пусть за столом сидит N человек. Верно ли, что происходит *информационный каскад*: если $s_1=R$, то в равновесии $a_1=a_2=\ldots=a_N=R$, вне зависимости от сигналов $s_2,\ldots,s_N$?

(15 points) "Etiquette problem"

Albus Dumbledore (Player 1), Severus Snape (Player 2) and Harry Potter (Player 3) are seated at a gala dinner table. They are brought a fish dish and an exotic fork, with which this fish should be eaten. The problem is that all three do not remember which hand to hold the fork; initially it is known that there are two possible states of the world: $w=R$ (that is, the fork must be held in the right hand) and $w=L$ (that is, the fork must be held in the left hand). Moreover, the a priori probability that $w=R$ is $p\geq 1/2$.

In addition, each player i=1,2,3 has private information s_i□$\{L,R\}$, which is true with probability $q>1/2$, and

$$\frac{q}{1-q} > \sqrt{\frac{p}{1-p}}$$

This means that, if the fork really needs to be held in the right hand, then $s_i=R$ with probability q and $s_i=L$ with probability 1-q. For a given w, random variables are statistically independent.

- **(a) (5 points)** Let the players take the forks in this order: first, Dumbledore chooses a_1□$\{L,R\}$, then Snape chooses a_2, then Potter chooses a_3. Each player wants not to be mistaken with which hand to take the fork, in this case he receives a win equal to 1 (and a win equal to 0 in the opposite case). Find how Snape's choice will depend on s_2 and a_1.
- **(b) (5 points)** Find how Potter's choice will depend on a_1, a_2 and s_3.
- **(c) (5 points)** Let N people sit at the table. Is it true that an *information cascade* occurs: if $s_1=R$, then, in equilibrium, $a_1=a_2=\ldots=a_N=R$, regardless of signals $s_2,\ldots,s_N$?

6. (20 баллов) «Хитрые уступки»

Ася и Боря собираются играть в следующую игру. Фишка стоит в корне бинарного дерева глубины n, все ребра которого ориентированы от корня к листьям. В каждом листе случайно и независимо написана буква «А» с вероятностью p или «Б» с вероятностью $1-p$. Ребята по очереди совершают ходы, перемещая фишку вдоль ребра из вершины в соседнюю с ней. Через n ходов фишка достигает листа. Если на нем буква «А», то выигрывает Ася, если «Б», то Боря.

Боря – настоящий джентльмен. Он предлагает отдать Асе первый ход и даже вероятность сделать в Асину пользу: p =4/7.

- **(a) (10 баллов)** В предположении, что $n=2k$ велико, посоветуйте Асе, стоит ли ей соглашаться на такие щедрые уступки? Ответ обоснуйте.
- **(b) (10 баллов)** Найдите такое p, что даже при большом $n=2k$ у обоих ребят шанс выиграть хотя бы 10%. Бонус тем, кто напишет чем еще примечательно это число.

(20 points) "Tricky concessions"

Asya and Boris are going to play the next game. The chip is at the root of a binary tree of depth n, all edges of which are oriented from the root to the leaves. The letter “A” with probability p or “B” with probability $1 - p$ is randomly and independently written in each sheet. The players take turns moving the chip along the edge from the vertex to the neighboring one. After n moves, the chip reaches the leaf. If the letter “A” is on it, then Asya wins, if “B”, then Boris.
Boris is a real gentleman. He offers to give Asa the first move and even the to make the probability in favor of Asya: $p = 4/7$.

- **(a) (10 points)** Under the assumption that $n=2k$ is large, advise Asya whether she should agree to such generous concessions? Explain the answer.
- **(b) (10 points)** Find a p such that even with large $n = 2k$, both players have at least 10% chances to win. We will give a bonus to those who write what else is remarkable with this number p.